

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de M'sila

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

**Master**

**SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES**

**OPTION : EDPs et applications**

**Présenté par : DOUADI Ahlam**

**Intitulé**

# Étude d'un problème de Kirchhoff via la théorie du genre

Soutenu publiquement le 18/06/2018 à l'université de M'sila devant le jury composé de

BEN HAMIDOUCHE N.	Professeur	Univ. M'sila	Président
SENGOUGA A.	M.C.A	Univ. M'sila	Examineur
MOKHTARI A.	M.C.B	Univ. M'sila	Encadreur

## Remerciements

EN préambule à ce mémoire, J'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand **Dieu** tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grand générosité. Allah m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

*Je* tiens à exprimer tous d'abord ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur monsieur **MOKHTARI Abdelhak** qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux. *Je* désire à le remercie pour sa compétence, sa rigueur ainsi que pour leur caractère novateur de ses idées.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres du jury Messieurs **SENGOUGA A. et BEN HAMIDOUCHE N.** pour l'intérêt qu'ils ont portés à ma recherche en acceptant d'examiner et d'évaluer mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

*Je* n'oublie pas adresser mes remerciements à monsieur **BOUGHRARA B.** pour son aide précieuse et ses conseils. *Je* souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'a apporté leur aide et qui contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Ces remerciements vont également au corps professoral et administratif de la faculté **des mathématiques et de l'informatique** pour la qualité de leur enseignement et qui déploient de grand efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

*Je* voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, mes derniers et profonds gratitudes vont à mes chères parents à qui je dédie ce modeste travail ainsi qu'à toute ma famille pour leur grand soutien.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Préliminaires et espaces fonctionnels</b>	<b>8</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	8
1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$ . . . .	8
1.1.2 Base Hilbertienne et base de Schauder . . . . .	10
1.1.3 Opérateur de Nemytskii . . . . .	11
1.1.4 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	13
1.1.5 Injection de Sobolev . . . . .	14
1.1.6 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	15
1.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques . . . . .	16
1.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux . . . . .	16
1.2.2 Dérivé au sens de Fréchet . . . . .	18
1.2.3 Points critiques . . . . .	19
1.3 Condition de Palais-Smale . . . . .	19
<b>2 Le genre de Krasnoselskii</b>	<b>22</b>
2.1 Introduction et définition . . . . .	22
2.2 Propriétés du genre . . . . .	24
2.3 Théorème de Clark . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Existence et multiplicité des solutions d'équation de type Kirchhoff</b>	<b>31</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Résultat d'existence et multiplicité pour $p=2$ . . . . .	32
3.2.1	Théorème d'existence . . . . .	33
3.2.2	Compacité de $I$ . . . . .	40
3.3	Généralisation aux cas $1 < p < N$ . . . . .	46
	<b>Conclusion générale</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

# Notations

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	ensemble des réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs.
$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension $N$ .
$x$	vecteur de $\mathbb{R}^N$ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , $x_i \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq N$ .
$dx$	mesure de Lebesgue de dimension $N$ .
$B(x, r)$	la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ ; $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid  x - y  < r\}$ .
$\overline{B(x, R)}$	la boule fermée de centre $x$ et de rayon $R$ ; $\overline{B(x, R)} = \{y \in \mathbb{R}^N \mid  x - y  \leq R\}$ .
$\Omega$	ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$\overline{\Omega}$	la fermeture de $\Omega$ .
$u$	fonction mesurable définie de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ .
$\nabla u$	gradient de $u$ , $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ .
$\operatorname{div} v$	divergence du vecteur $v$ , $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_N}$ .
$\Delta u$	laplacien de $u$ , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$ .
$\Delta_p u$	le p laplacien de $u$ , $\Delta_p u = \operatorname{div}( \nabla u ^{p-2} \nabla u)$ .
$C(\Omega)$	espace des fonctions continues sur $\Omega$ .
$C^k(\Omega)$	espace des fonctions continues sur $\Omega$ dont les dérivées partielles ; d'ordre $\leq k$ sont continues sur $\Omega$ , $k$ entier positif.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	l'ensemble des fonctions différentiables et la dérivée est continue.

$C^\infty(\Omega)$	l'espace $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$ .
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_\Omega  u ^p dx < \infty\}$ ( $1 \leq p < \infty$ , constant).
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \exists c \geq 0 \text{ tel que }  u(x)  \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}$ .
$p'$	conjugué de Hölder de $p$ , $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$ .
$p^*$	l'exposant de Sobolev tel que : $p^* = \frac{Np}{N-p}$ .
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\Omega$ , à support compact dans $\Omega$ .
$W^{1,p}(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées ; partielles au sens des distribution d'ordre 1 sont également dans $L^p(\Omega)$ ; muni de la norme $\ u\ _{W^{1,p}} = \sum \ \partial_i u\ _{L^p}$ .
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ , c-à-d : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ .
p.p.	presque partout.
T.A.F	théorème des accroissements finis.
T.C.D	théorème de convergence dominé de Lebesgue.
$H^1(\Omega)$	$W^{1,2}(\Omega)$ .
$H_0^1(\Omega)$	$W_0^{1,2}(\Omega)$ .
$E \hookrightarrow F$	$E$ s'injecte continûment dans $F$ .
$E \hookrightarrow_c F$	$E$ s'injecte d'une manière compacte dans $F$ .
$\rightharpoonup$	converge faiblement.
$\rightarrow$	converge fortement.
$E'$	est le dual topologique de $E$ ou l'espace des formes linéaire et continue sur $E$ .
$\gamma(A)$	le genre de $A$ .

## Introduction Générale

Ce travail consiste à l'étude de l'existence et la multiplicité de solution du problème elliptique non local de type p-Kirchhoff de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\left[M(\|u\|^p)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{P})$$

où  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  et  $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues vérifient les hypothèses convenables. La preuve est basée sur la théorie des points critiques et la théorie du genre de Krasnoselskii. Les solutions faibles de (P) sont caractérisées comme étant des points critiques de la fonctionnelle :

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_0^{\|u\|^p} [M(s)]^{p-1} ds - \int_{\Omega} \int_0^u f(x, u) dx.$$

avec les  $u$  appartiennent à un espace des fonctions convenables. En générale, plusieurs de problèmes sont équivalent à résoudre l'équation :

$$Au = 0$$

Où  $A : E \longrightarrow E'$  est un opérateur avec  $E$  un espace de Banach et  $E'$  son dual topologique. Dans le cas où le problème est variationnel, on peut trouver une fonctionnelle différentiable  $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $A = I'$ , c-à-d :

$$\langle Au, v \rangle = \langle I'(u), v \rangle.$$

et nous avons :

$$Au = 0 \Leftrightarrow I'(u) = 0.$$

c-à-d  $u$  est un point critique de  $I$  si et seulement si  $u$  est une solution faible de l'équation

$$Au = 0.$$

Les applications les plus importantes des méthodes min-max sont les résultats qui établissent l'existence des points critiques multiples des fonctionnelles paires de classe  $C^1$  sur un espace de Banach. Le premier résultat de la multiplicité pour

les fonctionnelles symétriques est dû à Ljusternik et Schnirelmam [13] parmi ces résultats, la notion du genre qui a été présentée par Krasnoselskii (voir [11]).

Le problème de Kirchhoff est un cas particulier de l'équation non stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - [M(\|u\|^2)\Delta u] &= f(x, u), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T); \\ u &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T); \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{array} \right. \quad (1)$$

Ce problème hyperbolique (1) est une version générale de l'équation :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

qui a été présentée par Kirchhoff en 1883, et qui est une extension de l'équation d'onde classique de D'Alembert en considérant les variations de la longueur des cordes pendant les vibrations.

Les paramètres dans (2) ont les significations suivantes :  $L$  est la longueur de la corde,  $h$  est la surface de la section transversale,  $E$  est le module de Young du matériau,  $\rho$  est la masse volumique (mass density),  $P_0$  est la tension initiale.

Comme il est bien connue, le problème (1) a commencé à attirer l'attention de plusieurs chercheurs essentiellement après les travaux de Lions, où une approche d'analyse fonctionnelle a été proposée pour le traiter. Ces dernières années, des problèmes elliptiques impliquant des opérateurs de type p-Kirchhoff ont été étudiés dans de nombreux articles ; On réfère à quelques sources dans lesquels les auteurs ont utilisé différentes méthodes pour montrer l'existence de la solution.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres de manière suivante :

Dans **le premier chapitre** On introduit dans une section un rappel et certaines notions et propriétés des espaces de Lebesgue et l'espace de Sobolev. Et dans l'autre section, on a introduit quelques définitions sur la notion de la différentiabilité, les points critiques et un critère de compacité qui s'appelle la condition de Palais Smale. Dans **le second chapitre**, on s'intéresse à étudier quelques préliminaires sur la théorie du genre qui introduite par Krasnoselskii et nous citons leurs propriétés et en



les démontrant. Et on termine ce chapitre par le théorème de Clark qui joue un rôle très important dans l'étude de notre problème. En effet, il nous permet de garantir l'existence et la multiplicité des points critiques d'une fonctionnelle liée à un problème aux limites d'E.D.Ps.

**Le 3ème chapitre,** Nous avons présenté deux applications qui s'appuient de manière essentielle sur l'article ([8],[9]) qui consiste à étudier l'existence et la multiplicité des solutions pour un problème aux limites de type Kirchhoff :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -M(\|u\|^2)\Delta u &= f(x, u) \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (P_1)$$

# Chapitre 1

## Préliminaires et espaces fonctionnels

Ce chapitre constitue un rappel de quelques préliminaires et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On citera en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels.

### 1.1 Espaces fonctionnels

#### 1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce que suit,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$ .

**Définition 1.1.1 (Voir [3])** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\| f \|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

On peut vérifier facilement que  $\| \cdot \|_{L^p}$  définit une norme sur l'espace vectoriel  $L^p(\Omega)$  ce qui montre que  $L^p(\Omega)$  est un espace normé.

**Définition 1.1.2** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } f \text{ est mesurable . } \exists C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

$L^\infty(\Omega)$  est un espace normé quand le munit par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

**Notation** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant **conjugués** de  $p$  c'est à dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ou} \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

**Proposition 1.1.1 (Inégalité de Hölder)** (Voir [3]) Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $p \in [1, \infty]$  alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et :

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

L'écriture  $f_n(x) \longrightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ , signifie que la suite  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$  presque partout sur  $\Omega$ .

**Théorème 1.1.1 (Convergence dominée de Lebesgue)** (Voir [3])

Soit  $(f_n)$  une suite des fonctions de  $L^1(\Omega)$ . On suppose que :

- (i)  $f_n(x) \longrightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ ,
- (ii) il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$ .

**Théorème 1.1.2 (Convergence dominée de Lebesgue inverse)** (Voir [3]) Soient  $(f_n)$  une suite de  $L^p$  et  $f \in L^p$ , tels que :  $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ . Alors, il existe une sous suite extraite  $(f_{n_k})$  telle que :

- a)  $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$
- b)  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$  et p.p. sur  $\Omega$  avec  $h \in L^p$

Le résultat suivant rassemble quelques propriétés topologiques des espaces de Lebesgue.

---

1. On dit que  $g$  est une majorante intégrable des fonctions  $(f_n)$

**Théorème 1.1.3 (Voir [3])** 1. *L'espace  $L^p(\Omega)$  est de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,*  
 2. *L'espace  $L^p(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ ,*  
 3. *L'espace  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .*

**Définition 1.1.3 (la convergence faible et forte)** (voir [18]) Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  et soit  $E'$  son dual topologique<sup>2</sup>. On dit que  $(x_n)$  converge faiblement dans  $E$  s'il existe un élément  $x \in E$  tel que :

$$\forall f \in E', \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x). \text{ ou } \left( \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \right)$$

**Notation :** On notera  $x_n \rightharpoonup x$ , ou  $x_n \xrightarrow{E} x$  pour être précis, la convergence faible dans  $E$ . On notera de même  $x_n \longrightarrow x$ , ou  $x_n \xrightarrow{E} x$  pour être précis, la convergence forte dans  $E$  (c'est à dire la convergence en norme).

## 1.1.2 Base Hilbertienne et base de Schauder

**Définition 1.1.4** Un espace de **Hilbert**  $H$  est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(u, v)$  et qui est **complet** pour la norme  $(u, u)^{1/2}$ .

Par la suite,  $H$  désigne un espace de Hilbert.

**Définition 1.1.5** On appelle **une base hilbertienne**, une suite d'éléments de  $H$  tels que :

- (i)  $|e_n| = 1 \quad \forall n, \quad (e_m, e_n) = 0 \quad \forall m, n, \quad m \neq n$
- (ii) L'espace vectoriel engendré par les  $(e_n)$  est dense dans  $H$ ; c-à-d :  $\overline{\text{vect}\{e_n\}} = H$ .

Le résultat suivant présente une condition pour l'existence d'une base Hilbertienne

**Théorème 1.1.4 (voir [3])** Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

---

2. l'espace des formes linéaire et continues sur  $E$ ,  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

### Bases dans les espaces de Banach :

**Définition 1.1.6** Soit  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'élément de  $E$  est **une base de Schauder** de  $E$  si pour tout  $x \in E$ , il existe une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de scalaires telle que :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n,$$

au sens de la convergence en norme dans  $E$ , les scalaires  $a_n$  sont alors appelés les *cordonnés* de  $x$ .

Les bases jouent un rôle important en géométrie des espaces de Banach (voir par exemple [14]). Toutes les espaces usuels (séparable) de l'analyse tels les espaces de Lebesgue et de Sobolev possèdent une base de Schauder (voir [16] mais en générale, il y a des espaces de Banach séparable n'admettent pas une base de Schaudère (voir [7]) tels  $\mathcal{L}(H)$  l'espace des formes linéaire et continue sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, ce résultat a été démontré par Szankowski.

### 1.1.3 Opérateur de Nemytskii

L'opérateur de Nemytskii est une classe des opérateurs non linéaires, il prend leur nom du mathématicien Victor Vladimirovich Nemytskii.

**Définition 1.1.7** ([5]) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . On dit qu'une fonction  $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction *carathéodory*, ssi :

1.  $\forall x \in \Omega$  p.p.  $\xi \longrightarrow f(x, \xi)$  est continue.
2.  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \longrightarrow f(x, \xi)$  est mesurable.

**Définition 1.1.8** Soit  $f$  une fonction de carathéodory. L'opérateur définit par :

$$N_f(u(x)) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega,$$

est appelé l'opérateur de Nemytskii.

Le résultat suivant montre une propriété importante sur la continuité et la bornitude d'opérateur de Nemytskii.

**Théorème 1.1.5** ([5]) Soient  $p_1, p_2 \geq 1$ ,  $a > 0$  et soit  $b$  une fonction dans  $L^{p_2}(\Omega)$ . Soit  $f$  une fonction de Carathéodory satisfait :

$$\left| f(x, \xi) \right| \leq b(x) + a |\xi|^{\frac{p_1}{p_2}}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Alors,

$$\begin{aligned} N_f : L^{p_1} &\longrightarrow L^{p_2} \\ u(\cdot) &\longrightarrow N_f(u(\cdot)) = f(u, u(x)) \end{aligned}$$

est un opérateur continu et borné de  $L^{p_1}(\Omega)$  dans  $L^{p_2}(\Omega)$

**Démonstration.** d'après l'inégalité de Minkowski, on a :

$$\| f(u) \|_{p_2} \leq \| b \|_{p_2} + a \| u \|_{p_1}^{\frac{p_1}{p_2}}$$

d'où  $\| \cdot \|_p$  est la norme associée dans  $L^p(\Omega)$ . Pour montrer la continuité de  $f$ , il suffit de prouver que si la suite  $(u_n)$  converge dans  $L^{p_1}(\Omega)$  alors il existe une sous suite  $(u_{n_k})$  telle que  $f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u)$  dans  $L^{p_2}(\Omega)$ . En effet : on peut trouver une sous suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  et on a  $(u_n)$  une suite converge presque partout, c-à-d :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et par conséquent :

$$\| u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \|_{p_1} < \frac{1}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

donc

$$|u_{n_k}(x)| \leq \Phi(x) = |u_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |u_{n_k}(x) - u_{n_{k-1}}(x)|$$

avec  $\phi$  mesurable et

$$\left( \int |\phi(x)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \| u_{n_1} \|_{p_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \| u_{n_k} - u_{n_{k-1}} \|_{p_1} < +\infty,$$

on conclut que  $\phi \in L^{p_1}(\Omega)$  et on note :

$$f(u_{n_k}) = \varphi(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow \varphi(x, u(x)) \quad p.p.$$

et

$$|f(u_{n_k})(x)| \leq b(x) + a(\phi(x))^{\frac{p_1}{p_2}} \in L^{p_2}(\Omega)$$

on a par le T.C.D :  $\|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{p_2} \longrightarrow 0$ , alors  $f$  est continue.

### 1.1.4 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , on note par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  et de support compacte inclus dans  $\Omega$ .

**Définition 1.1.9 (voir [3])** *L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est définie par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega), \text{ tel que : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i \in \overline{1, n} \right\}.$$

En particulier, pour  $p = 2$ , on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

pour  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

$\nabla u$  est appelé la dérivé au sens faible de  $g$ .

L'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

(ou parfois, si  $1 < p < \infty$ , de la norme équivalente  $[\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p]^{1/p}$ ).

**Proposition 1.1.2** *L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert quand le muni par le produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2};$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = [\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2]^{1/2}.$$

est équivalent de la norme de  $W^{1,2}(\Omega)$ .

Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ .

### Proposition 1.1.3

- (i) L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ ,
- (ii) l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ ,
- (iii) l'espace  $H^1(\Omega)$  est espace de Hilbert séparable.

### 1.1.5 Injection de Sobolev

Le but de cette section est d'introduire quelques injections continues et compactes dans les espaces de Sobolev. Rappelons qu'un opérateur linéaire  $T$  entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normé)  $E$  et  $F$  est dit **compact** si l'image par  $T$  de toute partie bornée de  $E$  est relativement compact (adhérence compacte) dans  $F$ . Plus précisément, pour toute suite  $(x_n)$  une suite bornée dans  $E$ , on peut extraire une sous suite  $u_n = (T(x_{n_k}))_{n_k \in \mathbb{N}}$  de la suite  $u_n = T(x_n)$  converge dans  $F$ .

#### Notation

1. L'espace  $E$  s'injecte d'une manière **continue** dans  $F$ , signifie que l'injection canonique  $j : E \rightarrow F$  est continue et on le note par  $E \hookrightarrow F$ .

2. L'espace  $E$  s'injecte d'une manière **compacte** dans  $F$ , signifie que l'injection  $j : E \rightarrow F$  est compacte et on le note par  $E \hookrightarrow_c F$ .

Si  $1 \leq p < N$ , l'exposant de Sobolev de  $p$  est définie par :

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

ou :

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$



**Théorème 1.1.6** ([3]) Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^1$ , borné, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$  :

- (i) Si  $1 \leq p < N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ ,
- (ii) Si  $p = N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$ ,
- (iii) Si  $p > N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.7 (Rellich-Kondrachov)** ([3]). On suppose que  $\Omega$  borné de classe  $C^1$ . On a

- (i) Si  $p < N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[$ ,
- (ii) Si  $p = N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$ ,
- (iii) Si  $p > N$ , alors  $W^{1,p} \hookrightarrow_c C(\bar{\Omega})$ ,

### 1.1.6 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.1.10** ([3]) Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  c'est à dire  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ .

On note  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ .

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est munit de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est munit du produit scalaire induit par  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.1.4** ([3]) L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.8** ([3]) Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  si et seulement si  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

**Proposition 1.1.5 (Inégalité de Poincaré)** ([3]) Soit  $\Omega$  un ouvert, borné alors il existe une constante  $C$  (dépendant de  $|\Omega|$  et  $p$ ) telle que :

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Autrement dit, sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la quantité  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

### Quelques inégalités préliminaires

**Proposition 1.1.6** *soient  $a, b > 0$ , on a :*

1.  $|a + b|^p \leq 2^{q-1}(|a|^p + |b|^p), \quad \forall 1 < p < N.$
2. Si  $1 < p < 2 : \left| |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b \right| \leq c|a - b|^{p-1}.$
3. Si  $p \geq 2 : \left| |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b \right| \leq c(|a - b||a|^{p-2} + |a - b|^{p-1}).$
4. Si  $p \geq 2 : \left| |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b \right| \leq c|a - b|(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}).$
5. Soient  $x, y \in \mathbb{R}^N$

- Si  $p \geq 2$ , on a :

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq C_p |x - y|^p$$

- Si  $1 < p < 2$ , on a :

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \frac{C_p |x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}$$

## 1.2 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques

Dans ce que suit, on introduit quelques notions des dérivées pour des fonctions définies sur des espaces de Banach. Nous commençons par celle de la dérivée directionnelle.

### 1.2.1 Dérivé au sens de Gâteaux

**Définition 1.2.1** ([10]) *Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et soit  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $I$  est différentiable au sens de Gâteaux ( $G$ -différentiable) en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A \in E'$  ( $A$  linéaire et continue), noté par  $I'_G(u)$  tel que, pour tout  $v \in E$ , où  $I(u + tv)$  existe pour  $t > 0$  assez petit, la dérivée directionnelle  $DI(u)$  existe c-à-d :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \langle Au, v \rangle \quad (1.1)$$

si  $I$  est différentiable au sens de Gâteaux en  $u$ , il existe seulement une fonctionnelle linéaire vérifié (1.1).

**Exemple 1.2.1** Soit  $I : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $I(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$ ,  $I$  est  $G$ -différentielle et on a :

$$\langle I'_G(u), v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u v dx$$

En effet, soit  $x \in \Omega$ ,  $t$  suffisamment petit fixé et on définit

$$g_{u,v}(s) = |u + sv|^p, \quad s \in [0, t]$$

Soit  $g_{u,v} : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $g_{u,v}$  est continue sur l'intervalle fermé  $[0, t]$  et dérivable sur l'intervalle ouvert  $]0, t[$  alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel  $c_t \in ]0, t[$  vérifiant :

$$\begin{aligned} g_{u,v}(t) - g_{u,v}(0) &= |u + tv|^p - |u|^p \\ &= g'_{u,v}(c_t)t \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{|u + tv|^p - |u|^p}{t} = p|u + c_tv|^{p-2}(u + c_tv)v.$$

Lorsque  $t \rightarrow 0$ , alors :  $c_t \rightarrow 0$  et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u + tv|^p - |u|^p}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} p|u + c_tv|^{p-2}(u + c_tv)v \\ &= p|u|^{p-2}uv, \end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence de Lebesgue, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv$$

Alors, pour tout  $u \in L^p(\Omega)$ , l'opérateur  $Au$  est définie par

$$\begin{aligned} A : L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle Au, v \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \end{aligned}$$

On démontre que  $Au \in (L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ . I.e.  $A$  est linéaire et continue.

$A$  est **linéaire**, en effet : soit  $v_1, v_2 \in L^p(\Omega)$  et soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= p \int |u|^{p-2} u (\alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= p \left[ \int |u|^{p-2} u \alpha v_1 + \int |u|^{p-2} u \beta v_2 \right] \\ &= \alpha p \int |u|^{p-2} u v_1 + \beta p \int |u|^{p-2} u v_2 \\ &= \alpha \langle Au, v_1 \rangle + \beta \langle Au, v_2 \rangle \end{aligned}$$

Donc,  $Au$  est **linéaire**.

$Au$  est **continu**, en effet : pour tout  $v \in L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \langle Au, v \rangle \right| &= \left| p \int |u|^{p-2} u v \right| \leq p \int |u|^{p-1} |v| \\ &\leq p \left( \int |u|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq p \left( \int |u|^{(p-1)\left(\frac{p}{p-1}\right)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{L^p}^{p-1} \|v\|_{L^p} . \end{aligned}$$

Alors,  $Au$  est continu. Donc, la fonctionnelle  $I$  est **G-différentiable** et on a :

$$I'_G(u) = Au.$$

### 1.2.2 Dérivé au sens de Fréchet

**Définition 1.2.2** ([10]) Soit  $E$  un espace de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert et soit  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle. On dit que  $I$  est différentiable au sens de Fréchet en  $u \in \Omega$ , s'il existe  $A \in E'$  tel que :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0.$$

ou

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

si  $I$  est différentiable, alors  $A$  est unique et on note  $I'(u) = A$ . L'ensemble des fonctions différentiables sera noté  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Proposition 1.2.1** *Soit  $\Omega \subseteq E$  un ensemble ouvert, supposons que  $I$  est Gâteaux différentiable sur  $\Omega$  et que  $I'_G$  est continue en  $u \in \Omega$ . Alors  $I$  est différentiable en  $u$  et on a :  $I'_G(u) = I'(u)$ .*

**Remarque 1.2.1** *L'importance de la proposition (1.2.1) réside dans le fait qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continu, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.*

### 1.2.3 Points critiques

**Définition 1.2.3** ([10]) *Soient  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach  $E$ . Supposons que  $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . On dit que  $u \in \Omega$  est **un point critique** de  $I$ , si :*

$$I'(u) = 0.$$

*Si  $u$  n'est pas un point critique, alors on dit que  $u$  est un point régulier de  $I$ .*

*Si  $c \in \mathbb{R}$ , alors on dit que  $c$  est une valeur critique de  $I$ , s'il existe  $u \in \Omega$  tel que*

$$I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0.$$

*Si  $c$  n'est pas valeur critique, alors on dit que  $c$  est une valeur régulière de  $I$ .*

## 1.3 Condition de Palais-Smale

**La condition de Palais-Smale** joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition à priori, à vérifier au cas par cas sur chaque fonctionnelle. Indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un ingrédient essentiel pour montrer cette existence dans un certain nombre de cas.

**Définition 1.3.1** ([12]) *Soit  $E$  un espace de Banach et  $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On dit que  $I$  vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau  $c$ ) si de toute suite  $u_n$*

de  $E$  telle que :

$$I(u_n) \longrightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0 \text{ dans } E'.$$

Alors, on peut extraire une sous suite **convergente**.

### Remarque 1.3.1

i) **la condition de Palais Smale** ne préjuge pas de l'existence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite  $u_n$ , celle ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

ii) Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet même si  $c = \inf_{\Omega} I$ , on peut parfaitement avoir une sous suite minimisante  $u_n$  telle que  $I'(u_n) \not\rightarrow 0$ .

On prend cette exemple pour démontrer le remarque :

Soit  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que :  $I(u_n) = \sin u_n^2$

et soit  $u_n = (\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}})^{1/2}$ , alors  $I(u_n) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}})$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin[(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}})^{1/2}]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin[\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin[\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}] \\ &= -1. \end{aligned}$$

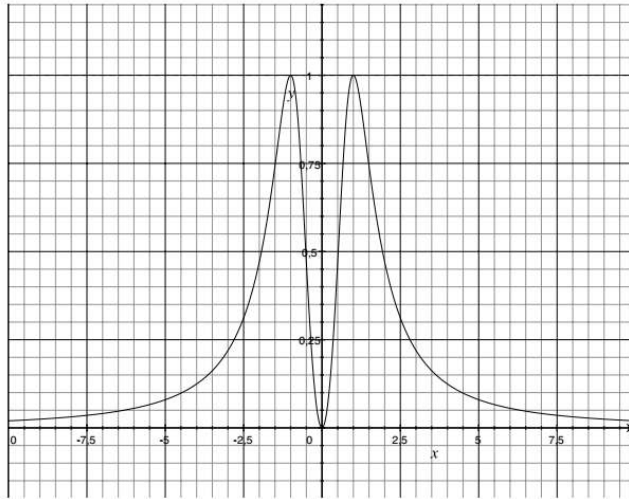
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \sin(u_n^2), \\ I'(u_n) &= 2u_n \cos(u_n^2), \\ &= 2\sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right). \end{aligned}$$

On fait le changement de variable suivant, tel que on pose  $t = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$

$$\begin{aligned}
 I'(u_n) &= 2 \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{t^2} + t} \right) \cos \left( \frac{3\pi}{2} + t \right), \\
 &= 2 \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{t^2} + t} \right) \cos \left( t + \frac{\pi}{2} + \pi \right), \\
 &= 2 \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{t^2} + t} \right) \sin(t), \\
 &= 2t \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{t^2} + t} \right) \frac{\sin(t)}{t}.
 \end{aligned}$$

Et lorsque  $t \rightarrow 0$ , on obtient :  $I'(u_n) \rightarrow 2$



Condition de Palais-Smale satisfaite au niveau  $c = 1$  et pas en  $c = 0$

# Chapitre 2

## Le genre de Krasnoselskii

### 2.1 Introduction et définition

La notion du **genre** que nous allons définir nous permet de distinguer deux ensembles  $A, B$  fermés, symétriques et ne contenant pas l'origine, en regardant s'il existe une fonction continue et impaire de  $A$  dans  $B$ . Il faut également savoir que pour différents types de problèmes, il faut introduire des notions adéquates d'indice topologique ; La notion du genre correspond à la notion d'indice pour les ensembles invariants sous l'action du groupe  $\mathbb{Z}_2$  et de ce fait joue un rôle important dans le cadre des problèmes variationnels qui ont une invariance sous l'action de ce groupe. Pour plus de détails voir ([15],[17],[10])

**Définition 2.1.1** ([10]) Soit  $E$  un espace de Banach. On désigne par  $\sum(E)$  l'ensemble des parties fermées symétriques de  $E$  ne contenant pas l'origine, plus précisément :

$$\sum(E) = \left\{ A \subset E ; A \text{ est fermée, non vide, } 0 \notin A, -A = A \right\}.$$

Si  $A \in \sum(E)$  on appelle **genre** de  $A$  le nombre noté  $\gamma(A)$ , défini par :

$$\gamma(A) := \inf \{ N \geq 1 ; \exists \varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \text{ continue et impaire} \}.$$

Par commodité on posera  $\gamma(\emptyset) = 0$ .

Comme toujours, s'il n'existe pas d'entier  $n \geq 1$  et de fonction  $\varphi$  continue et impaire



de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on pose  $\gamma(A) = +\infty$ .

Il est important de noter que **le genre** n'est défini que pour des ensembles fermés.

D'abord on rappelle par le résultat suivant :

**Théorème 2.1.1 (Borsuk-Ulam)** ([10]) Soit  $\Omega$  un ouvert symétrique de  $\mathbb{R}^N$ , contenant l'origine et soit  $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$  continue et impaire, telle que  $\varphi(\partial\Omega) \subset E_0$ , (où  $E_0 \subset \mathbb{R}^N$  avec  $\dim E_0 \leq N - 1$ ). Alors, il existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tel que  $\varphi(x_0) = 0$ .

**Exemple 2.1.1** Soit  $E$  un espace de Banach, et soit  $x_0 \in E$ ,  $\|x_0\| > R$  et  $A := \bar{B}(x_0, R) \cup \bar{B}(-x_0, R)$ .

Alors :  $A$  est du **genre** un  $\gamma(A) = 1$ . En effet, il suffit de poser :

$$\varphi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in \bar{B}(x_0, R), \\ -1 & \text{si } x \in \bar{B}(-x_0, R). \end{cases}$$

**Remarque 2.1.1** Si  $A \in \Sigma$  et  $\gamma(A) > 1$  alors  $A$  contient une infinité de points distincts. Si  $A$  est fini, on peut écrire  $A = B \cup (-B)$  donc  $\gamma(A) = 1$ .

Voici une classe importante d'ensemble du genre  $N$ .

**Exemple 2.1.2** Soit  $E = \mathbb{R}^N$  et  $\Omega$  un ouvert borné symétrique contenant l'origine. On a :  $\gamma(\partial\Omega) = N$ . En effet, on prend la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi &= i : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \\ x &\longrightarrow i(x) = x, \end{aligned}$$

qui est continue et impaire, alors par la définition de  $\gamma(\partial\Omega)$ , on a  $\boxed{\gamma(\partial\Omega) \leq N}$

D'autre part, par l'absurde on suppose que :  $\gamma(\partial\Omega) \leq N - 1$ , alors : il existe une fonction continue et impaire

$$\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\},$$

alors d'après le théorème 2.1.1, il existe  $x_0 \in \partial\Omega$ , tel que  $\varphi(x_0) = 0$ , ce qui en contradiction avec le fait que  $\varphi$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}$

Donc,  $\gamma(\partial\Omega) > N - 1 \implies \boxed{\gamma(\partial\Omega) \geq N}$ . Alors, on conclut que :  $\boxed{\gamma(\partial\Omega) = N}$

En prend  $\Omega$  est la boule unitée dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\partial\Omega = S^{N-1}$ , on obtient :

**Corollaire 2.1.1** *On a  $\gamma(S^{N-1}) = N$ .*

**Remarque 2.1.2** *Si  $E$  est un espace de dimension infini et séparable, alors  $\gamma(S) = \infty$  où  $S$  est la sphère d'unité dans  $E$ .*

## 2.2 Propriétés du genre

Pour démontrer quelques propriétés sur le genre, on a besoin de présenter le théorème suivant :

**Théorème 2.2.1 (Tietze-Urysohn)** [10] *Soit  $A$  un ensemble fermé de  $\mathbb{R}^N$  et soit  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue et bornée.*

*Alors, il existe un prolongement continue  $\tilde{f}$  de  $f$ , tel que*

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

*i.e.  $\tilde{f} = f$  sur  $A$  et  $\tilde{f}(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}^m$ .*

Nous regroupons ci-dessous quelques propriétés essentielles du **genre** que nous serons amenés à utiliser fréquemment.

**Proposition 2.2.1** *Soit  $E$  un espace de Banach et  $A, B \in \Sigma(E)$ .*

- (i) S'il existe  $f : A \longrightarrow B$  continue et impaire, alors  $\gamma(A) \leq \gamma(B)$ .*
- (ii) Si  $A \subset B$  alors  $\gamma(A) \leq \gamma(B)$ .*
- (iii) S'il existe un homéomorphisme impaire  $f : A \longrightarrow B$ , alors  $\gamma(A) = \gamma(B)$ .*
- (iv)  $\gamma$  est sous-additif :  $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$ .*
- (v) si  $A$  est compacte alors  $\gamma(A) < \infty$ .*
- (vi) si  $A$  est compacte, alors il existe un voisinage fermé de  $A$  ayant le même genre que  $A$ . Plus précisément, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si*

$$A_\varepsilon := \{x \in E ; \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

*On a  $\gamma(A_\varepsilon) = \gamma(A)$ .*

(vii) Si  $\gamma(B) < \infty$ , alors  $\gamma(\overline{A \setminus B}) = \gamma(\overline{A \setminus B^c}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$ .

**Démonstration.** On va démontrer les propriétés du **genre** précédentes :

(i) Si on a :  $\gamma(B) = +\infty$ , on a rien à prouver.

Supposons donc  $\gamma(B) = n$  (i.e.  $B$  est du genre fini), alors il existe  $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  continue et impaire. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\longrightarrow f(x) \longrightarrow \varphi(f(x)) \end{aligned}$$

d'où  $\varphi \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  continue et impaire. (Puisque on a  $f$  est une fonction continue et impaire). Ce qui implique que

$$\gamma(A) \leq n = \gamma(B).$$

(ii) On suppose que  $\gamma(B) = n \Rightarrow \{ n \geq 1 \ \exists \varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}$  continue et impaire. il suffit de prendre  $f = id_A : A \longrightarrow B$  et en appliquant la propriété (i) pour déduire que :

$$\gamma(A) \leq \gamma(B).$$

(iii) Si  $\gamma(B) = +\infty$  est évident à démontrer. On suppose que  $\gamma(B) = n$  alors il existe  $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  continue et impaire.

Et puisqu'il existe un homéomorphisme impaire (une application bijective et continue), on obtient :

$$\gamma(A) = n = \gamma(B).$$

(iv) Si le genre de  $A$  ou celui de  $B$  est égale à l'infini, on a rien à prouver. Supposons donc que  $A$  et  $B$  sont des genres finis et soient  $\gamma(A) = m$ ,  $\gamma(B) = n$ . Il existe alors deux fonctions  $\varphi, \psi$  continues et impaires :

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad \psi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

d'après le théorème (2.2.1), on peut faire un prolongement continue  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$  de  $\varphi, \psi$  successivement, telle que :

$$\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \tilde{\varphi} \text{ continue et impaire,} \quad \tilde{\varphi} = \varphi \text{ sur } A,$$

$$\tilde{\psi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{\psi} \text{ continue et impaire,} \quad \tilde{\psi} = \psi \text{ sur } B.$$

En posant,

$$\begin{aligned} f : A \cup B &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \setminus \{0\} \\ x &\longrightarrow f(x) = \left( \tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x) \right), \end{aligned}$$

qui est continue et impaire sur  $A \cup B$ . Alors,

$$\gamma(A \cup B) \leq n + m = \gamma(A) + \gamma(B).$$

(v) Soit  $x \in A$ . Comme l'origine n'appartient pas à  $A$ , on a  $x \neq 0$  et en prenant  $R(x) < |x|$  (par exemple  $R(x) = \frac{1}{2}|x|$ ) on a

$$\bar{B}(x, R(x)) \cap \bar{B}(-x, R(x)) = \emptyset.$$

Posons alors

$$\omega(x) = B(x, R(x)) \cup B(-x, R(x)) \text{ et } A(x) = \overline{\omega(x)}.$$

D'après l'exemple (2.1.1) que nous avons vu ci-dessus, on sait que  $\gamma(A(x)) = 1$ . De façon évidente, la famille  $(\omega(x))_{x \in A}$  est **un recouvrement ouvert** de  $A$ , et celui-ci étant compact, il existe  $n \geq 1$  et un nombre fini de points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (on peut extraire un recouvrement fini) tels que :

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \omega(x_i) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{\omega(x_i)}.$$

On en conclut en particulier que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A(x_i),$$

et la propriété de sous-additivité du genre (propriété (iv)) et le fait que  $\gamma(A(x_i)) = 1$ , ce qui impliquent que

$$\begin{aligned} \gamma(A) &\leq \gamma(A(x_1)) + \gamma(A(x_2)) + \dots + \gamma(A(x_n)), \\ &\leq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n \end{aligned}$$

c'est à dire que  $A$  est de genre fini.

(vi) On sait que  $A$  est de genre fini : soient  $\gamma(A) = n$  et  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  une fonction continue et impaire.

Par le théorème (2.2.1) il existe un prolongement  $\tilde{\varphi}$  continu et impair de  $E$  dans  $\mathbb{R}^N$ . L'ensemble  $A_\varepsilon$  étant comme dans l'énoncé du théorème, comme  $A$  est compact et  $0 \notin \varphi(A)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$0 \notin \tilde{\varphi}(A_\varepsilon).$$

En effet, sinon il existerait une suite  $(x_k)_k$  de  $E$  et une suite  $(y_k)_k$  de  $A$  telle que

$$\tilde{\varphi}(x_k) = 0, \quad d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k}.$$

Puisque  $A$  est compacte, modulo une extraction de sous-suite, on peut supposer que la suite  $y_k \rightarrow y \in A$  et que par conséquent  $x_k \rightarrow y$ .

On aurait alors  $0 = \tilde{\varphi}(x_k) \rightarrow \tilde{\varphi}(y)$ , c'est à dire que  $\tilde{\varphi}(y) = 0$ . Ou  $y \in A$  et  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$  et  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $A$ .

Par conséquent il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\tilde{\varphi}$  envoie  $A_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; Comme  $\tilde{\varphi}$  est continue et impaire, on a  $\gamma(A_\varepsilon) \leq n$  et d'après la propriété de croissance du **genre**(propriété (ii)) :

$$n = \gamma(A) \leq \gamma(A_\varepsilon) \leq n.$$

(vii) On a :

$$A \subset B \cup \overline{(A \setminus B)},$$

en utilisant la propriété (ii) de la proposition 2.2.1 et on voit que :

$$\gamma(A) \leq \gamma(B \cup \overline{(A \setminus B)}).$$

d'après la propriété de sous additivité, on obtient :

$$\leq \gamma(B) + \gamma(\overline{(A \setminus B)}),$$

et puisque  $\gamma(B) < \infty$ , on a :

$$\gamma(\overline{(A \setminus B)}) \geq \gamma(A) - \gamma(B).$$

**Proposition 2.2.2** *Soit  $A \subset E$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  borné et symétrique par rapport à 0, supposons qu'il existe une application  $h \in C(A, \partial\Omega)$  avec  $h$  impaire et homéomorphisme, alors  $\gamma(A) = N$ .*

**Proposition 2.2.3** *Pour  $E = \mathbb{R}^N$  et  $1 \leq j \leq N$ , on définit :*

$$\gamma_j = \{A \in \sum \setminus A \subset S^{N-1} \text{ et } \gamma(A) \geq j\}.$$

*Cette famille des ensembles possède les propriétés suivantes :*

1.  $\gamma_j \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j \leq N$ .
2.  $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \dots \supset \gamma_N$ .
3. *On suppose que  $\varphi \in C(S^{N-1}, S^{N-1})$  et impaire. Alors,  $\varphi : \gamma_j \longrightarrow \gamma_j$  est bien définie i.e. pour tout  $A \in \gamma_j$  on a  $\varphi(A) \in \gamma_j$ .*
4. *Si  $A \in \gamma_j$  et  $B \in \sum$  avec  $\gamma(B) \leq s < j$ , alors  $\overline{A - B} \in \gamma_{j-s}$ .*

## 2.3 Théorème de Clark

**Théorème 2.3.1** *Soit  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  une fonctionnelle vérifie la condition de P-S.*

*On suppose que :*

1.  *$I$  est borné inférieurement et paire,*
2. *il existe un compact  $K \in \sum$  tel que  $\gamma(K) = j$  et  $\sup_{x \in K} I(x) < I(0) = 0$ .*

*Alors  $I$  admet au moins  $j$  paire des points critiques distincts.*

**Démonstration.** On pose :

$$\gamma_k = \left\{ A \in \sum \setminus \gamma(A) \geq k \right\},$$

et on définit :

$$c_k = \inf_{A \in \gamma_k} \sup_{u \in A} I(u), \quad 1 \leq k \leq j.$$

Les ensembles  $\gamma_k$  satisfont les propriétés (1-4) du proposition 2.2.3 avec  $S^{N-1}$  remplacé par  $E$ . Comme la suite  $\gamma_k$  est décroissante, il est clair que :

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_j.$$

De plus  $c_1 > -\infty$  car  $I$  est borné inférieurement et  $c_j < 0$  car  $\gamma(K) = \gamma(S^{j-1}) = j$  via le corollaire (2.1.1) et  $I|_K < 0$ , d'après le principe de min-max,  $c_k$  est une valeur critique de  $I$ , on voit donc que si tous les  $c_k$  sont distincts alors  $I$  possède  $j$  valeurs critiques distinctes, i.e.  $j$  paires de points critiques. Pour montrer le théorème, il nous reste à établir le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1** *Si pour des entiers  $1 \leq k \leq j-1$  et  $1 \leq p \leq j-k$  avec :*

$$-\infty < c_k = c_{k+1} = \dots = c_{k+p} = c < +\infty,$$

*alors l'ensemble :*

$$K_c := \{u \in E \setminus I(u) = c \text{ et } I'(u) = 0\}$$

*vérifie  $\gamma(K_c) \geq p+1$ .*

**Démonstration.**(du lemme) D'abord, on signale que  $0 \notin K_c$ . En effet, on suppose que  $0 \in K_c$  i.e.  $I(0) = 0 = c$  mais on a vu que pour toute  $1 \leq k \leq j$  on a  $c_k < 0$  donc la contradiction, il est clair que  $K_c \in \Sigma$  car  $I$  est paire et comme  $I$  satisfait la condition de (P-S) alors on a  $K_c$  est compact, par la proposition (2.2.1) (v) on déduit que  $\gamma(K_c) < \infty$ .

Par l'absurde, on suppose que  $\gamma(K_c) \leq p$ . Alors, par la proposition (2.2.1)(vi) il existe  $\delta > 0$  telle que  $\gamma(V_\delta(K_c)) = \gamma(K_c) \leq p$ , on pose  $\widehat{V} = V_\delta(K_c) \cap S^{j-1}$ , comme  $\widehat{V} \subset V_\delta(K_c)$  alors  $\gamma(\widehat{V}) \leq p$ . En appliquant le lemme de déformation avec  $\mathcal{O} = \text{int}\widehat{V}$  at  $\bar{\varepsilon} = 1$ , il existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  et  $\eta \in C([0, 1] \times S^{j-1}, S^{j-1})$  où  $\eta(t, u)$  est impaire par rapport  $u$  et satisfaire :

$$\eta(1, \widehat{A}_{c+\varepsilon} - \widehat{N}) \subset \widehat{A}_{c-\varepsilon} \quad (2.1)$$

où :

$$\widehat{A}_{c+\varepsilon} = \{u \in E : I(u) \leq c + \varepsilon\}$$

$$\widehat{A}_{c-\varepsilon} = \{u \in E : I(u) \leq c - \varepsilon\}$$

on montre que :

$$c \leq \max_{\eta(1, \widehat{A} - \widehat{V})} \leq c - \varepsilon; \quad (2.2)$$

Par définition  $c = c_{j+p} \inf_{A \in \gamma_{j+p}} \max_{u \in A} I(u)$ , en utilisant la proposition (2.2.1)(vii)

on a :

$$\gamma(\overline{A - \widehat{V}}) \geq \gamma(A) - \gamma(\widehat{V}) \geq j,$$

d'où  $\overline{A - \widehat{V}} \in \gamma_j$ .

Donc, on déduit la relation (2.1) que (2.2) est vérifiée (contradiction).

Par la remarque (2.1.1), en particulier, si  $p \geq 1, K_c$  est infini. i.e. la fonctionnelle  $I$  admet une infinité de paire des points critiques.



# Chapitre 3

## Existence et multiplicité des solutions d'équation de type Kirchhoff

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème elliptique "non local" de **type Kirchhoff** de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left[M(\|u\|^p)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

où  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  à frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $f$  une fonction continue et qui sera spécifiée ultérieurement et  $M$  est une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Le problème (P) est appelé non local en raison de la présence du terme  $M(\|u\|^p)$  qui implique que l'équation n'est plus identité ponctuelle.

Cela provoque certaines difficultés mathématiques qui rendent l'étude d'un tel problème intéressante. Ce genre de problème ont des motivations physiques. En effet, l'opérateur de Kirchhoff  $M(\|u\|^p)$  apparaît aussi dans l'équation des vibrations non linéaires.

## 3.2 Résultat d'existence et multiplicité pour $p=2$

Dans cette section, on va étudier le problème pour le cas particulier  $p = 2$  afin de comprendre les étapes et les techniques de manière facile et explicite. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_1)$$

D'où, dans tous ce travail on considère que  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert régulier borné.

Soient  $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  sont des fonctions continues,  $\Delta u$  est l'opérateur Laplacien, qui définie par :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

et  $\| \cdot \|$  est la norme usuelle dans  $H_0^1(\Omega)$  donné par :

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Supposons que les fonctions  $f, M$  vérifient les conditions suivantes :

Il existe des constants positifs  $A, B$  et  $\alpha$ , tels que :

$$At^\alpha \leq M(t) \leq Bt^\alpha, \quad (M)$$

Il existe  $Q_1, Q_2$  et  $q$  des constants positifs, tels que :

$$Q_1 t^{q-1} \leq f(x, t) \leq Q_2 t^{q-1}, \quad (f_1)$$

Pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \in \overline{\Omega}$ , d'où  $q \in (2, 2^* = \frac{2N}{N-2})$  et  $\alpha > \frac{q}{2}$ .

$$f(x, t) = -f(x, -t), \quad (f_2)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ .

On utilise la théorie du **genre** introduite dans le chapitre 2 pour démontrer le résultat principal, comme ce que suit :

### 3.2.1 Théorème d'existence

Voici le résultat principal :

**Théorème 3.2.1** *Supposons  $(M), (f_1)$  et  $(f_2)$ . Alors, le problème  $(P_1)$  admet une infinité de solutions.*

**Définition 3.2.1** *On dit que  $u \in H_0^1(\Omega)$  est une solution faible du problème  $(P_1)$ . Si elle vérifie l'équation suivante :*

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{PV})$$

Revenons au problème  $(P_1)$ . Pour cela, nous considérons la fonctionnelle  $I$  définie par :

$$I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow I(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u),$$

$$\text{d'où, } \widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)] ds \text{ et } F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds.$$

**Lemme 3.2.1** *Soit la fonctionnelle  $I$  est de classe  $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  et*

$$I'(u)v = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v,$$

*pour tout  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .*

**Démonstration.** on va suivre les étapes suivantes. D'abord, nous commençons à démontrer que :

**1.  $I$  est Gâteau différentiable.**

1. 1<sup>er</sup> **étape** : soient  $u, u + tv \in H_0^1(\Omega)$  et  $t > 0$ . On a

$$I(u + tv) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u + tv\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u + tv) dx,$$

Par un calcul simple, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{1}{2t} \left[ \widehat{M}(\|u + tv\|^2) - \widehat{M}(\|u\|^2) \right]}_I - \underbrace{\frac{1}{t} \left[ \int_{\Omega} F(x, u + tv) - F(x, u) \right]}_{II} \right)$$

on pose  $g(s) = \widehat{M}(\|u + sv\|^2) = \int_0^{\|u+sv\|^2} M(\sigma) d\sigma$ , tel que :  $\|u + sv\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla(u + sv)|^2 dx$ .

D'après T.A.F, il existe un constant  $c_t \in ]0, t[$  vérifiant :

$$g(t) - g(0) = g'(c_t).t,$$

alors :

$$\widehat{M}(\|u + tv\|^2) - \widehat{M}(\|u\|^2) = 2.M(\|u + c_tv\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v . t$$

d'après T.C.D :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widehat{M}(\|u + tv\|^2) - \widehat{M}(\|u\|^2)}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} 2M(\|u + c_tv\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v \\ &= 2M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \end{aligned}$$

En effet, on a :

- (i)  $(\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v \longrightarrow \nabla u \nabla v$  p.p.  $x \in \Omega$
- (ii) posons :  $w_t = (\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v$ , pour tout  $c_t \in ]0, 1[$  et on a :

$$\begin{aligned} |w_t| &\leq (|\nabla u| + c_t |\nabla v|) |\nabla v| \\ &\leq (|\nabla u| + |\nabla v|) |\nabla v| \in L^1(\Omega) \end{aligned}$$

Et puisque  $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue, alors :

$$M(\|u + c_tv\|^2) \longrightarrow M(\|u\|^2)$$

Ce qui implique que :

$$M(\|u + c_tv\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u + c_t \nabla v) \nabla v \longrightarrow M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

Pour la partie (II) : on démontre que

$$\frac{1}{t} \int_{\Omega} (F(x, u + tv) - F(x, u)) dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v.$$

facilement de voir que :

$$F(x, u + tv) - F(x, u) = \int_0^{u+tv} f(x, s) ds - \int_0^u f(x, s) ds.$$

Posons :

$$h(s) = F(x, u + sv) = \int_0^{u+sv} f(x, \eta) d\eta,$$

alors, d'après T.A.F, il existe un constant  $c_t \in ]0, t[$ , tel que :

$$h(t) - h(0) = h'(c_t).t$$

alors :

$$\begin{aligned} F(x, u + tv) - F(x, u) &= v.F'(x, u + c_tv)t \\ &= v.f(x, u + c_tv)t \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + c_tv)v$$

et par le T.C.D, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u + c_tv)v dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, u)v dx. \end{aligned}$$

En effet, d'abord on a :

$$v(x).f(x, u(x) + c_tv(x)) \longrightarrow v(x).f(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

De plus, d'après l'hypothèse  $(f_1)$  on a

$$\left| f(x, u + c_tv)v \right| \leq Q_2 |u + c_tv|^{q-1} |v|.$$

En utilisant l'inégalité premier de la proposition (1.1.6) avec  $a = u$ ,  $b = c_tv$ ,

on obtient :

$$|u + c_tv|^{q-1} \leq 2^{q-2} (|u|^{q-1} + c_t^{q-1} |v|^{q-1})$$

Alors,

$$\begin{aligned} |f(x, u + c_tv)v| &\leq Q_2.2^{q-2} (|u|^{q-1} + c_t^{q-1} |v|^{q-1}) |v|, \\ &= Q_2.2^{q-2} |u|^{q-1} |v| + Q_2.2^{q-2}.c_t^{q-1} |v|^q. \end{aligned}$$

On prend  $c_t$  suffisamment petit ( $c_t < 1$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| f(x, u + c_t v) v \right| &\leq Q_2 \cdot 2^{q-2} (|u|^{q-1} |v| + |v|^q) \\ &\leq k (|u|^{q-1} |v| + |v|^q) \end{aligned}$$

Où  $k = Q_2 \cdot 2^{q-2}$ , on vérifie que  $|u|^{q-1} |v| \in L^1(\Omega)$  et  $|v|^q \in L^1(\Omega)$ .

D'une part, comme  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$  et puisque  $v \in H_0^1(\Omega)$  alors  $v \in L^{2^*}(\Omega)$  et comme  $q < 2^*$  alors,  $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  et par conséquent :  $v \in L^q(\Omega)$  d'où  $|v|^q \in L^1(\Omega)$ . Et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} k \int_{\Omega} (|u|^{q-1} |v| + |v|^q) &\leq k \left( \int_{\Omega} |u|^{(q-1)(2^*)'} \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \left( \int_{\Omega} |v|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} + \int_{\Omega} |v|^q dx \\ &\leq k \|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1} \|v\|_{L^{2^*}} + \|v\|_{L^1} \end{aligned}$$

On vérifie que :  $u \in L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$  ; Comme  $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ . Alors, il suffit de montrer que

$$L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$$

On a la quantité  $\|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1}$  est bien définie grâce aux injections continues :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega).$$

Sachant que :  $(q-1)(2^*)' < 2^*$ . Alors,  $u \in L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$ , il vient

$$\int_{\Omega} |u|^{q-1} v < \infty \implies |u|^{q-1} v \in L^1(\Omega)$$

En appliquant le T.C.D, on obtient :

$$\int_{\Omega} f(x, u + c_t v) v dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

2. 2<sup>me</sup> étape : il reste de montrer que pour  $u \in H_0^1(\Omega)$ , l'opérateur

$$\begin{aligned} Au : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle Au, v \rangle = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v \end{aligned}$$

est linéaire et continu a)  $Au$  est linéaire, en effet, soient  $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ , et soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \langle Au, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle &= M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla (\alpha v_1 + \beta v_2) dx - \int_{\Omega} f(x, u) (\alpha v_1 + \beta v_2) \\
 &= \alpha M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_1 - \alpha \int_{\Omega} f(x, u) v_1 dx + \beta M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_2 \\
 &\quad - \beta \int_{\Omega} f(x, u) v_2 dx \\
 &= \alpha \left( M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_1 - \int_{\Omega} f(x, u) v_1 dx \right) + \beta \left( M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_2 \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} f(x, u) v_2 dx \right) \\
 &= \alpha \langle Au, v_1 \rangle + \beta \langle Au, v_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

b)  $Au$  est continue : en effet, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  on a :

$$|\langle Au, v \rangle| = \left| M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| \leq M(\|u\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right| + \left| \int_{\Omega} f \cdot v dx \right|$$

d'après Cauchy Schwarz et l'hypothèse  $(f_1)$  :

$$\begin{aligned}
 |\langle Au, v \rangle| &\leq M(\|u\|^2) \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + Q_2 \int_{\Omega} |u^{q-1} v| \\
 &\leq M(\|u\|^2) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + Q_2 \left( \int_{\Omega} |u|^{(q-1)(2^*)'} \right)^{\frac{1}{(2^*)'}} \left( \int_{\Omega} |v|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \\
 &\leq M(\|u\|^2) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1} \|v\|_{L^{2^*}}
 \end{aligned}$$

et par l'injection :  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
 |\langle Au, v \rangle| &\leq M(\|u\|^2) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1} \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq \left( M(\|u\|^2) \|u\|_{H_0^1} + Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1} \right) \|v\|_{H_0^1} \\
 &\leq C \|v\|_{H_0^1}
 \end{aligned}$$

Où  $C = M(\|u\|^2) \|u\|_{H_0^1} + Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(2^*)'}}^{q-1}$

Alors,  $A$  est continue et par suite la fonctionnelle  $I$  est **G-différentiable** et

on a :

$$\langle I'_G(u), v \rangle = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

où :

$$\begin{aligned} Au = I'_G(u) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle I'_G(u), v \rangle = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \end{aligned}$$

### 2. $I$ est Fréchet différentiable.

Pour vérifier que la fonctionnelle  $I$  est **Fréchet différentiable**, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} I'_G : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega) \\ u &\longrightarrow I'_G(u) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

tel que :  $I'_G(u) = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$  est continue. On prend  $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ , telle que  $u_n \longrightarrow u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , soit  $v \in H_0^1(\Omega)$  avec  $\|v\|_{H_0^1} \leq 1$  :

Rappelons que la norme dans  $(H_0^1(\Omega))'$  est définie par :

$$\|I'_G(u_n) - I'_G(u)\|_{(H_0^1)'} = \sup_{\substack{\|v\|_{H_0^1} \leq 1 \\ v \in H_0^1(\Omega)}} \frac{|\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1}}$$

Le but est de démontrer que  $\|I'_G(u_n) - I'_G(u)\|_{(H_0^1)'} \longrightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} |\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle| &= |\langle I'_G(u_n), v \rangle - \langle I'_G(u), v \rangle| \\ &= \left| M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - M(\|u\|^2) \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| \\ &\leq \underbrace{\left| M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx - M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \right|}_I \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right|}_{II} \end{aligned}$$

(i) : D'une part,  $(u_n)$  est une suite convergente dans  $H_0^1(\Omega)$  ; alors :

$$\|u_n\|_{H_0^1}^2 \longrightarrow \|u\|_{H_0^1}^2$$

et puisque  $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est continue, alors :

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(\|u\|^2), \quad (3.1)$$



d'autre part, par Cauchy Schwarz on a :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \right| \leq \|u_n - u\|_{H_0^1} \longrightarrow 0.$$

Ce qui prouve que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2), il vient :

$$M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx \longrightarrow M(\|u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \quad (3.3)$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , avec :  $\|v\| \leq 1$ .

(ii) : On veut démontrer que :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u)) v \right|, \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)| |v| dx, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder et par l'injection de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

avec  $\|v\| \leq 1$  on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(2^*)'}} \|v\|_{L^{2^*}} \\ &\leq c \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(2^*)'}} \|v\|_{H_0^1} \\ &\leq c \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(2^*)'}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On applique le théorème (1.1.5) ; d'après l'hypothèse  $(f_1)$  et en prenant :  $p_1 =$

$(q-1)(2^*)'$  et  $p_2 = (2^*)'$

on déduit que l'opérateur de Nemytskii définie par :

$$\begin{aligned} N_f : L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega) &\longrightarrow L^{(2^*)'}(\Omega) \\ u(x) &\longrightarrow N_f(u)(x) = f(x, u(x)). \end{aligned}$$

est continu, donc il suffit de vérifier que :  $u_n \longrightarrow u$  dans  $L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$  ; on a vu que :

$H_0^1(\Omega)$  est s'injecte continument dans  $L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$ .

alors  $u_n \longrightarrow u$  dans  $L^{(q-1)(2^*)'}(\Omega)$  et par conséquent

$$N_f(u_n) \longrightarrow N_f(u) \quad \text{dans } L^{(2^*)'}(\Omega)$$

Ce qui implique que :

$$\| f(x, u_n) - f(x, u) \|_{L^{(2^*)}' } \longrightarrow 0$$

D'où

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v dx. \quad (3.5)$$

Alors, (3.3) et (3.5) nous donne :

$$\| I'_G(u_n) - I'_G(u) \|_{(H_0^1)' } \longrightarrow 0.$$

Donc,  $I'_G(u)$  est continue et  $I$  est Fréchet différentiable ; on pose :

$$I'_G(u) = I'(u).$$

D'après **(1)** et **(2)**,  $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  et plus précisément :

$$\langle I'(u), v \rangle = M(\| u \|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx. \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

**Remarque 3.2.1**  $u \in H_0^1(\Omega)$  est un point critique de  $I$  si et seulement si  $u$  est une solution faible du problème  $(P_1)$ .

### 3.2.2 Compacité de $I$

Dans la démonstration du théorème (3.2.1) nous aurons besoin des résultats techniques suivants.

**Lemme 3.2.2**  $I$  est une fonctionnelle bornée inférieurement et paire.

**Démonstration.**

- Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$ , telle que on a :

$$I(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\| u \|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

$$I(-u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\| u \|^2) - \int_{\Omega} F(x, -u) dx.$$

On a :

$$F(x, -u) = \int_0^{-u} f(x, s) ds.$$

On faisant le changement de variable :  $s = -\gamma$ , on obtient :

$$F(x, -u) = \int_0^u f(x, \gamma) d\gamma = F(x, u).$$

Alors,  $F$  est paire et ce qui implique que :  $I$  est impaire.

- $I$  est bornée inférieurement. En effet, pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  on a :

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\|u\|^2} M(s) ds - \int_{\Omega} \left( \int_0^u f(x, s) ds \right) dx, \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses  $(M)$  et  $(f_1)$

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2} \int_0^{\|u\|^2} A.s^\alpha ds - Q_2 \int_{\Omega} \left( \int_0^u s^{q-1} ds \right) dx, \\ &= \frac{A}{2(\alpha+1)} s^{\alpha+1} \Big|_0^{\|u\|^2} - \frac{Q_2}{q} \int_{\Omega} (s^q \Big|_0^u) dx \\ &= \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2\alpha+2} - \frac{Q_2}{q} \int_{\Omega} u^q dx \\ &\geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2\alpha+2} - \frac{Q_2}{q} \int_{\Omega} |u|^q dx \\ &= \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|_{H_0^1}^{2\alpha+2} - \frac{Q_2}{q} \|u\|_{L^q}^q \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme  $q \in ]2, 2^*[$  et on utilise l'injection de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , on obtient :

$$I(u) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|_{H_0^1}^{2\alpha+2} - \frac{Q_2}{q} C' \|u\|_{H_0^1}^q$$

comme  $\alpha > \frac{q}{2}$ , alors :  $2\alpha+2 > q$  et par conséquent  $I$  est bornée inférieurement.

**Lemme 3.2.3**  *$I$  satisfait la condition de Palais-Smale.*

**Démonstration.** Soit  $(u_n)$  une suite dans  $H_0^1(\Omega)$ , telle que :

$$I(u_n) \longrightarrow C \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

### CHAPITRE 3. EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUATION DE TYPE KIRCHHOFF

Comme  $I$  est bornée inférieurement, alors :

$$I(u_n) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u_n\|_{H_0^1}^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{H_0^1}^q$$

et le fait que la suite  $I(u_n)$  est convergente alors elle est bornée. Et par conséquent :  
il existe un constant  $C_1$  tel que :

$$I(u_n) \leq C_1.$$

Alors, on écrit :

$$C_1 \geq I(u_n) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u_n\|_{H_0^1}^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{H_0^1}^q \quad (3.7)$$

de (3.7), on déduit que :

$$\frac{A}{2(\alpha+1)} \|u_n\|_{H_0^1}^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{H_0^1}^q \leq C_1$$

Comme  $\alpha > \frac{q}{2} \Rightarrow 2(\alpha+1) > q$ , la suite  $(\|u_n\|)_n$  est bornée, en effet :

en démontrant par l'absurde : supposons que  $\|u_n\|$  n'est pas bornée. Alors :

$$\|u_n\| \longrightarrow +\infty,$$

et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u_n\|_{H_0^1}^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{H_0^1}^q = +\infty$$

Alors, on obtient une contradiction, car :

$$\frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|_{H_0^1}^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{H_0^1}^q \leq C_1$$

Donc, on conclut que la suite  $(\|u_n\|)_n$  est bornée. Alors, on peut extraire une sous suite  $(\|u_{n_k}\|)_n = \|u_n\|$  convergente vers  $t_0 \geq 0$ , on a :

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow t_0 \geq 0.$$

- (i) Si  $t_0 = 0$ . Alors,  $\|u_n\|^2 \longrightarrow 0$  et par suite :  $u_n \longrightarrow 0$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , ce qui termine la preuve.

(ii) Si  $t_0 > 0$ . Alors, puisque  $M$  est une fonction continue, on obtient :

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(t_0).$$

Par conséquent, pour  $n$  suffisamment grand

$$M(\|u_n\|^2) \geq \overline{C} > 0, \quad (3.8)$$

Comme  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $H_0^1(\Omega)$  :  $(\|u_n\| \leq c)$  et comme  $H_0^1(\Omega)$  est un espace réflexif, alors on peut extraire une sous suite  $u_n$  qui converge faiblement dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \quad (3.9)$$

d'après,  $(f_1)$ , (T.C.D) et les injections de Sobolev, on a :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} f(x, u_n) u dx & \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx \\ \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx & \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx. \end{cases}$$

On considère la suite :

$$\begin{aligned} P_n &= I'(u_n)u_n + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n - I'(u_n)u - \int_{\Omega} f(x, u_n)u \\ &= M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_n)^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx - \\ &\quad M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u + \int_{\Omega} f(x, u_n)u dx - \int_{\Omega} f(x, u_n)u dx \\ &= M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_n)^2 - M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u \\ &= M(\|u_n\|^2) \left[ \int_{\Omega} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$  on a :  $P_n \rightarrow 0$ . D'une part, de (3.10) on a :

$$P_n = M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 - M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u. \quad (3.11)$$

d'autre part, on considère :

$$T_n = -M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_n + M(\|u_n\|^2) \|u\|^2. \quad (3.12)$$

Comme on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla u_n \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \|u\|_{H_0^1}^2$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -M(t_0) \|u\|^2 + M(t_0) \|u\|^2 = 0.$$

Par sommation de (3.11) et (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} T_n + P_n &= -M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_n + M(\|u_n\|^2) \|u\|^2 + M(\|u_n\|^2) \|u_n\|^2 \\ &\quad - M(\|u_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_n \\ &= M(\|u_n\|^2) \left[ \|u_n\|^2 + \|u\|^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u \right] \\ &= M(\|u_n\|^2) \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u \right] \\ &= M(\|u_n\|^2) \left[ \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^2 \right] \\ &= M(\|u_n\|^2) \|u_n - u\|_{H_0^1}^2, \end{aligned}$$

en utilisant (3.8) :

$$T_n + P_n \geq \overline{C} \|u_n - u\|_{H_0^1}^2,$$

alors :

$$0 \leq \|u_n - u\|^2 \leq \frac{1}{\overline{C}} (T_n + P_n),$$

et puisque,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\overline{C}} (T_n + P_n) = 0,$$

donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{H_0^1}^2 = 0$$

on déduit que :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{converge fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Donc, on conclut que la fonctionnelle  $I$  satisfait la condition de Palais-Smale.

**Démonstration du théorème (3.2.1).** Soit  $\{e_1, e_2, \dots\}$  une base hilbertienne de  $H_0^1(\Omega)$  et pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  on considère  $X_k = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  le sous espace de  $H_0^1(\Omega)$  engendré par les  $k$  vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

On note que  $X_k \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq 2^*$  avec injection continue. Par conséquent, les normes de  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$  sont équivalents sur  $X_k$ .

Alors, il existe un constant positif  $C(k)$  qui dépend du  $k$ , tel que :

$$-C(k) \|u\|^q \geq - \int_{\Omega} |u|^q, \quad (3.13)$$

pour tout  $u \in X_k$ . On utilise maintenant  $(M)$  et  $(f_1)$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\|u\|^2} M(s) ds - \int_{\Omega} \int_0^u f(x, s) ds dx \\ &\leq \frac{B}{2} \int_0^{\|u\|^2} s^{\alpha} ds - Q_1 \int_{\Omega} \int_0^u s^{q-1} ds dx \\ &= \frac{B}{2(\alpha+1)} s^{\alpha+1} \Big|_0^{\|u\|^2} - \frac{Q_1}{q} \int_{\Omega} s^q \Big|_0^u dx \\ &= \frac{B}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_1}{q} \int_{\Omega} u^q dx, \end{aligned}$$

d'après (3.13), on a :

$$\leq \frac{B}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{Q_1}{q} C(k) \|u\|^q,$$

ou aussi

$$I(u) \leq \|u\|^q \left( \frac{B}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)-q} - C(k) \frac{Q_1}{q} \right).$$

Soit  $R > 0$ , tel que comme  $I(u) < I(0) = 0$ , alors :

$$\frac{B}{2(\alpha+1)} R^{2(\alpha+1)-q} < C(k) Q_1.$$

Pour tout  $u \in K$ , on considère

$$K = \left\{ u \in X_k : \|u\| = r \right\},$$

soit  $0 < r < R$ , on a :

$$\begin{aligned}
 I(u) &\leq \|u\|^q \left( \frac{B}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} C(k) \right) \\
 &= r^q \left( \frac{B}{2(\alpha+1)} r^{2(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} C(k) \right) \\
 &< R^q \left( \frac{B}{2(\alpha+1)} R^{2(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} C(k) \right) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\sup_{u \in K} I(u) < I(0) = 0.$$

Soit  $K \subset X_k$ ,  $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$  il existe **un homéomorphisme** entre les deux espaces.

On considère l'application continue et impaire :

$$\begin{aligned}
 g : K &\longrightarrow S^{k-1} \\
 u &\longrightarrow g(u) = \frac{1}{r}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)
 \end{aligned}$$

Donc, on déduit que

$$\gamma(K) = \gamma(S^{k-1}) = k.$$

Les hypothèses du théorème de Clark (2.3.1) sont satisfaites alors le problème  $(P_1)$  admet au moins  $k$  paires des points critiques et  $k$  est arbitraire et par suite d'après la proposition (3.2.1), le problème  $(P_1)$  admet une infinité des solutions faibles.

### 3.3 Généralisation aux cas $1 < p < N$

À travers de cette section, on étudie l'existence et la multiplicité de (P), avec  $1 < p < N$ . en prenant prenons les mêmes hypothèses que nous définissons dans le cas particulier  $p = 2$  avec un peu de modification. Rappelons que  $\Delta_p u$  est l'opérateur p-laplacien, tel que :

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$



On note pour  $p = 2$  on a  $\Delta_p u = \Delta u$ .

et  $\| \cdot \|$  soit la norme usuelle dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  définie par :

$$\| u \|^p = \int |\nabla u|^p.$$

Soit  $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  continue et  $M$  vérifie :

$$At^\alpha \leq [M(t)]^{p-1} \leq Bt^\alpha \quad (H_1)$$

Il existe  $Q_1, Q_2, q > 0$  telles que :

$$Q_1 t^{q-1} \leq f(x, t) \leq Q_2 t^{q-1} \quad (H_2)$$

pour tout  $t \geq 0$  et pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ , d'où :  $q \in ]p, p^* = \frac{Np}{N-p}$  et  $\alpha > \frac{q}{p}$ .

$$f(x, t) = -f(x, -t) \quad (H_3)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \overline{\Omega}$

On dit que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  est une solution faible du problème (P). Si elle vérifie :

$$[M(\| u \|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(x, u) v,$$

pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Pour cela, on considère la fonctionnelle  $I : W_0^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ , donné par :

$$I(u) = \frac{1}{p} \widehat{M}(\| u \|^p) - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

d'où :  $\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds$  et  $F(x, u) = \int_0^t f(x, s) ds$ ,

tels que les points critiques trouvés par cette fonctionnelle représentent les solutions de problème (P).

**Théorème 3.3.1** *Supposons  $(M)$ ,  $(f_1)$  et  $(f_2)$ . Alors, le problème admet une infinité des solutions.*

**Proposition 3.3.1** *La fonctionnelle  $I$  est bien définie et de classe  $C^1$  sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

*Sa différentielle est donnée par :*

$$I'(u)v = [M(\| u \|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v,$$

pour tout  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Démonstration.** Nous allons suivre la même manière qu'on a déjà utilisée dans le cas particulier

(i) **Gâteau différentiable :** Soient  $u, u + tv \in W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $t > 0$ ,

on a : La fonctionnelle  $I$  est G-différentiable, en effet :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{1}{pt} [\widehat{M}(\|u + tv\|^p) - \widehat{M}(\|u\|^p)]}_I - \underbrace{\frac{1}{t} \left[ \int_{\Omega} F(x, u + tv) - F(x, u) \right]}_{II} \right)$$

Pour (I) : on pose  $g(s) = \widehat{M}(\|u + sv\|^p) = \int_0^{\|u+sv\|^p} [M(\sigma)]^{p-1} d\sigma$ , tel que on a :

$$\|u + tv\|^p = \int_{\Omega} |\nabla(u + tv)|^p dx$$

En appliquant le T.A.F, alors il existe  $c_t \in ]0, t[$  vérifiant :

$$\begin{aligned} g(t) - g(0) &= g'(c_t)t \\ \widehat{M}(\|u + tv\|^p) - \widehat{M}(\|u\|^p) &= p[M(\|u + c_tv\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla(u + c_tv)|^{p-2} \\ &\quad \nabla(u + c_tv) \nabla v \cdot t \\ \frac{\widehat{M}(\|u + tv\|^p) - \widehat{M}(\|u\|^p)}{t} &= p[M(\|u + c_tv\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla(u + c_tv)|^{p-2} \\ &\quad \nabla(u + c_tv) \nabla v \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\widehat{M}(\|u + tv\|^p) - \widehat{M}(\|u\|^p)}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} p[M(\|u + c_tv\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla(u + c_tv)|^{p-2} \\ &\quad \nabla(u + c_tv) \nabla v \\ &= p[M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \quad (3.14) \end{aligned}$$

L continuité de M affirme que :

$$M(\|u + c_tv\|^p) \longrightarrow M(\|u\|^p)$$

d'autre part, par le T.C.D on a :

$$\int_{\Omega} |\nabla(u + c_tv)|^{p-2} \nabla(u + c_tv) \nabla v \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v$$

En effet :

1.  $|\nabla(u + c_tv)|^{p-2}\nabla(u + c_tv)\nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v$  p.p. dans  $\Omega$
2. on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left| |\nabla(u + c_tv)|^{p-2}\nabla(u + c_tv)\nabla v \right| &= |(\nabla u + c_t\nabla v)|^{p-1}|\nabla v| \\
 &\leq c(|\nabla u|^{p-1} + |c_t|^{p-1}|\nabla v|^{p-1})|\nabla v| \\
 &\leq c(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1})|\nabla v| \\
 &\leq c(|\nabla u|^{p-1}|\nabla v| + |\nabla v|^p) \in L^1(\Omega).
 \end{aligned}$$

Pour (II) : on démontre que

$$\frac{1}{t} \int_{\Omega} (F(x, u + tv) - F(x, u)) dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v.$$

On a :

$$F(x, u + tv) - F(x, u) = \int_0^{u+tv} f(x, s) ds - \int_0^u f(x, s) ds.$$

Posons :

$$h(s) = F(x, u + sv) = \int_0^{u+sv} f(x, \eta) d\eta, \quad s \in [0, 1]$$

D'après T.A.F, il existe un constant  $c_t \in ]0, t[$

$$h(t) - h(0) = h'(c_t).t$$

D'où :

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + c_tv)v$$

et par le T.C.D, on a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} &= \lim_{c_t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u + c_tv) v dx \\
 &= \int_{\Omega} f(x, u) v dx.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En effet :

$$\lim_{c_t \rightarrow 0} v.f(x, u + c_tv) = v.f(x, u) \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

De plus, d'après l'hypothèse ( $f_1$ ) on a

$$\left| f(x, u + c_tv)v \right| \leq Q_2 |u + c_tv|^{q-1} |v|.$$

### CHAPITRE 3. EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUATION DE TYPE KIRCHHOFF

En utilisant l'inégalité premier avec  $a = u$ ,  $b = c_t v$  alors, on a :

$$|u + c_t v|^{q-1} \leq 2^{q-2} (|u|^{q-1} + c_t^{q-1} |v|^{q-1})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |f(x, u + c_t v)v| &\leq Q_2 \cdot 2^{q-2} (|u|^{q-1} + c_t^{q-1} |v|^{q-1}) |v|, \\ &= Q_2 \cdot 2^{q-2} |u|^{q-1} |v| + Q_2 \cdot 2^{q-2} \cdot c_t^{q-1} |v|^q. \end{aligned}$$

On prend  $c_t$  suffisamment petit ( $c_t < 1$ )

$$\begin{aligned} |f(x, u + c_t v)v| &\leq Q_2 \cdot 2^{q-2} (|u|^{q-1} |v| + |v|^q) \\ &\leq k (|u|^{q-1} |v| + |v|^q) \end{aligned}$$

On vérifie que  $|u|^{q-1} |v| \in L^1(\Omega)$  et  $|v|^q \in L^1(\Omega)$ .

D'une part, comme  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  et puisque on a :  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  alors  $v \in L^{p^*}(\Omega)$  et comme  $q < p^*$ , alors on a :

$$L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

et par conséquent :  $v \in L^q(\Omega)$  donc,  $|v|^q \in L^1(\Omega)$ . Et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |f(x, u + c_t v)v| &\leq k \left( \int_{\Omega} |u|^{(q-1)(p^*)'} \right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \left( \int_{\Omega} |v|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} + \int_{\Omega} |v|^q dx \\ &\leq k \|u\|_{L^{(q-1)(p^*)'}}^{q-1} \|v\|_{L^{p^*}} + \|v\|_{L^1} \end{aligned}$$

On montre que :  $u \in L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$ .

Comme  $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ , alors le fait que  $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$  car :  $(q-1)(p^*)' < p^*$ . qui vient de l'hypothèse  $q < p^*$ . Alors,  $u \in L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$ , et par suite :

$$|u|^{q-1} v \in L^1(\Omega).$$

Les relations (3.14) et (3.15) affirment que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tv) - I(u)}{t} = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v.$$

pour tout  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , on pose :

$$\begin{aligned} Lu : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle Lu, v \rangle = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v. \end{aligned}$$

L'opérateur linéaire  $L$  est continu, en effet : pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle Lu, v \rangle| &= \left| [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v \right| \leq [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \\ &\quad + \int_{\Omega} |f||v|. \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder (1.1.1) et l'hypothèse  $(f_1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle Lu, v \rangle| &\leq [M(\|u\|^p)]^{p-1} \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p} + Q_2 \int_{\Omega} |u|^{q-1} |v| \\ &\leq [M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} + Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(p^*)}'}^{q-1} \|v\|_{L^{p^*}} \end{aligned}$$

en utilisant l'injection :  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle Lu, v \rangle| &\leq [M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} + C.Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(p^*)}'}^{q-1} \|v\|_{W_0^{1,p}} \\ &\leq \left( [M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p-1} + C.Q_2 \|u\|_{L^{(q-1)(p^*)}'}^{q-1} \right) \|v\|_{W_0^{1,p}}. \end{aligned}$$

On conclut que la fonctionnelle  $I$  est **Gâteau différentiable** et on a :

$$\langle I'_G(u)u, v \rangle = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v,$$

pour tout  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

(ii)  $I$  est **Fréchet différentiable**

pour garantir la différentiabilité de  $I$  au sens de Fréchet, on a besoin de prouver que  $I'_G$  est continue, on a :

$$\begin{aligned} I'_G : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))' \\ u &\longrightarrow I'_G(u) = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v \end{aligned}$$

Soit  $(u_n)$  une suite de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , telle que :

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

On note :  $(W_0^{1,p}(\Omega))' = W_0^{-1,p'}(\Omega)$  et la norme dans  $W_0^{-1,p'}(\Omega)$  est définie par :

$$\| I'_G(u_n) - I'_G(u) \|_{W_0^{-1,p'}} = \sup_{\substack{\|v\| \leq 1 \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \frac{|\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle|}{\|v\|}$$

Alors, pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $\|v\| \leq 1$  on a :

$$\begin{aligned} |\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle| &= |\langle I'_G(u_n), v \rangle - \langle I'_G(u), v \rangle| \\ &\leq \left| [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u_n) v \right. \\ &\quad \left. - [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} f(x, u) v \right| \\ &\leq \left| [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v - [M(\|u\|^p)]^{p-1} \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u)) v \right| \end{aligned}$$

d'une part, comme  $(u_n)$  une suite convergente dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors :

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p \longrightarrow \|u\|_{W_0^{1,p}}^p$$

et puisque  $M$  est continue :

$$[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \longrightarrow [M(\|u\|^p)]^{p-1}. \quad (3.16)$$

En utilisant l'injection de Hölder :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right| &= \left| \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \left| |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} \right)^{1/p'} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \left| |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} \right)^{1/p'} \|v\|_{W_0^{1,p}} \end{aligned}$$

Comme  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $\|v\| \leq 1$

$$\leq \left( \int_{\Omega} \left| |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} \right)^{1/p'} \longrightarrow 0$$

En effet, Comme  $(u_n)$  une suite converge vers  $u$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors,  $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$  dans  $L^p(\Omega)$

1) Si  $1 < p < 2$  : en utilisant l'inégalité suivante :

$$\left| |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b \right| \leq |a - b|^{p-1}, \quad \forall a, b > 0$$

Alors, on a

$$\left| |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} \leq c |\nabla u_n - \nabla u|^{(p-1)p'}$$

et comme  $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$  dans  $L^p(\Omega)$ , alors :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

2) Si  $p \geq 2$  : en utilisant l'inégalité suivante :

$$\left| |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b \right| \leq c |a - b| \left( |a|^{p-2} + |b|^{p-2} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} &\leq c \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p'} \left( |\nabla u_n|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2} \right)^{p'} \\ &\leq c' \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p'} \left( |\nabla u_n|^{(p-2)p'} + |\nabla u|^{(p-2)p'} \right) \\ &= c' \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p'} |\nabla u_n|^{(p-2)p'} + \\ &\quad c' \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p'} |\nabla u|^{(p-2)p'} \end{aligned}$$

en appliquant Hölder pour  $\alpha = p - 1$  et  $\alpha' = \frac{p-1}{p-2}$

$$\begin{aligned} &\leq c' \left( \int |\nabla u_n - \nabla u|^{p'\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \int |\nabla u_n|^{(p-2)p'\alpha'} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} + c' \left( \int |\nabla u_n - \nabla u|^{p'\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\quad \left( \int |\nabla u|^{p'(p-2)\alpha'} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= c' \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p}^{p'} \|\nabla u_n\|_{L^p}^{(p-2)p'} + c' \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p}^{p'} \|\nabla u\|_{L^p}^{p'(p-2)} \end{aligned}$$

Comme  $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$  dans  $L^p(\Omega)$  et puisque  $\|\nabla u_n\|$  est bornée, alors :

$$\int_{\Omega} \left( |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \nabla v \longrightarrow 0 \quad (3.17)$$

De (3.16) et (3.17), il vient :

$$[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v \longrightarrow [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \quad (3.18)$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $\|v\| \leq 1$ . On a :

$$\left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| \longrightarrow 0.$$

Car :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u)) v \right|, \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)| |v| dx, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder pour  $p = p^*$  et par l'injection de Sobolev

$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  avec  $\|v\| \leq 1$  nous donne :

$$\begin{aligned} &\leq \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(p^*)'}} \|v\|_{L^{p^*}} \\ &\leq c \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(p^*)'}} \|v\|_{W_0^{1,p}} \\ &\leq c \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{L^{(p^*)'}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

d'après l'hypothèse  $(f_1)$  et le théorème 1.1.5, en prenant :  $p_1 = (q-1)(p^*)'$  et  $p_2 = (p^*)'$ , on trouve :  $p_2 = (p^*)'$ , alors :  $p_1 = (q-1)(p^*)'$  et puisque  $f$  une fonction de carathéodory, donc l'opérateur de Nemytskii :

$$\begin{aligned} N_f : L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega) &\longrightarrow L^{(p^*)'}(\Omega) \\ u(x) &\longrightarrow N_f(u)(x) = f(x, u(x)). \end{aligned}$$

est borné et continu donc, il suffit de vérifier que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$ .

D'après l'injection  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$  alors on déduit que  $u_n \longrightarrow u$  dans  $L^{(q-1)(p^*)'}(\Omega)$  et par conséquent :

$$f(., u_n) \longrightarrow f(., u) \quad \text{dans } L^{(p^*)'}$$

Alors,

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) v dx. \tag{3.20}$$



Alors (3.18) et (3.20) nous donne :

$$|\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle| \longrightarrow 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\| \leq 1.$$

Ce qui implique que :

$$\sup_{\substack{\|v\| \leq 1 \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \frac{|\langle I'_G(u_n) - I'_G(u), v \rangle|}{\|v\|} \longrightarrow 0$$

Donc,

$$\|I'_G(u_n) - I'_G(u)\|_{W_0^{-1,p'}} \longrightarrow 0$$

Ce qui montre que  $I'_G(u)$  est continue, alors :  $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$  et on a :

$$\langle I'(u), v \rangle = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

**Remarque 3.3.1**  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  est un point critique de la fonctionnelle  $I$ , si et seulement si  $u$  est une solution du problème (P).

Maintenant, on établit les résultats du théorème de Clark (2.3.1)

**Lemme 3.3.1** Soit  $I$  une fonctionnelle paire et bornée inférieurement.

**Démonstration.**

► Évident de voir que la fonctionnelle  $I$  est paire :

$$I(-u) = I(u).$$

►  $I$  est bornée inférieurement, en effet :

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p} \widehat{M}(\|u\|^p) - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\|u\|^p} M(s) ds - \int_{\Omega} \left( \int_0^u f(x, s) ds \right) dx, \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$

$$\begin{aligned}
 I(u) &\geq \frac{1}{p} \int_0^{\|u\|^p} A \cdot s^\alpha ds - Q_2 \int_\Omega \left( \int_0^u s^{q-1} ds \right) dx, \\
 &= \frac{A}{p(\alpha+1)} s^{\alpha+1} \Big|_0^{\|u\|^p} - \frac{Q_2}{q} \int_\Omega \left( s^q \Big|_0^u \right) dx \\
 &= \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u\|^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} \int_\Omega u^q dx \\
 &\geq \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u\|^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} \int_\Omega |u|^q dx \\
 &= \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} \|u\|_{L^q}^q
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Comme  $q \in ]p, p^*[$  alors :  $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  et par l'injection de Sobolev,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

On obtient :

$$I(u) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u\|_{W_0^{1,p}}^q$$

comme  $\alpha > \frac{q}{p}$ , alors :  $p\alpha + p > q$ , donc  $I$  est bornée inférieurement.

**Lemme 3.3.2** *I satisfait la condition de palais Smale.*

**Démonstration.** Soit  $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ , telle que :

$$I(u_n) \longrightarrow C \text{ et } I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Comme  $I$  est bornée inférieurement, alors :

$$I(u_n) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^q \tag{3.22}$$

et le fait que la suite réel  $I(u_n)$  est convergente alors, elle est bornée, et par conséquent : il existe un constant  $C_1$  tel que :

$$I(u_n) \leq C_1. \tag{3.23}$$

Alors, de (3.22) et (3.23) on écrit :

$$C_1 \geq I(u_n) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^q \tag{3.24}$$

de (3.24), on déduit que :

$$\frac{A}{p(\alpha+1)} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^q \leq C_1$$

Comme  $\alpha > \frac{q}{p}$ , alors  $p(\alpha+1) > q$ , on a la suite  $(\|u_n\|)_n$  est bornée. En effet : en démontrant par l'absurde : supposons que  $\|u_n\|$  n'est pas bornée. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = +\infty,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{p(\alpha+1)} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^q = +\infty$$

on obtient une contradiction, car :

$$\frac{A}{p(\alpha+1)} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q} C' \|u\|_{W_0^{1,p}}^q \leq C_1$$

Donc, on conclut que la suite  $(\|u_n\|)_n$  est bornée, alors on peut extraire une sous suite  $(\|u_{n_k}\|)_n = \|u_n\|$  convergente vers  $t_0 \geq 0$ , on a :

$$\|u_n\|^p \longrightarrow t_0 \geq 0. \quad (3.25)$$

(i) Si  $t_0 = 0$ . Alors,  $\|u_n\|^p \longrightarrow 0$  et par suite :  $u_n \longrightarrow 0$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , ce qui termine la preuve.

(ii) Si  $t_0 > 0$ . Comme  $M$  est une fonction continue alors,

$$M(\|u_n\|^p) \longrightarrow M(t_0)$$

Ainsi que, pour  $n$  suffisamment grand

$$M(\|u_n\|^p) \geq \overline{C} > 0 \quad (3.26)$$

Comme  $(u_n)$  est bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  :  $(\|u_n\| \leq c)$ , et comme  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est un espace réflexif, alors on peut extraire une sous suite  $u_n$  converge faiblement dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

d'après  $(H_2)$ , (T.C.D) et les injections de Sobolev, on vérifie que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} f(x, u_n) u dx & \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx \\ \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx & \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx. \end{cases}$$

$$\blacklozenge \int_{\Omega} f(x, u_n) u dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx.$$

on sait que :

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega)$$

D'après l'injection compact  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^s(\Omega), \forall s \in [1, p^*[$ ,

on a :

$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^s(\Omega) \quad \forall s \in [1, p^*[$$

et comme  $q \in ]p, p^*[$  alors,

$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^q(\Omega)$$

Alors, d'après le T.C.D inverse, il existe une sous suite extraite  $(u_{n_k}) = (u_n)$ , telle que :

- $u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega$
- $\exists h \in L^q(\Omega) : |u_n(x)| \leq h(x).$

par la continuité de  $f$ , on a :

- $f(x, u_n(x))u \longrightarrow f(x, u(x))u \text{ p.p. dans } \Omega$
- $\exists g \in L^1(\Omega) : |f(x, u_n)u| \leq g.$

en effet, d'après  $(H_2)$ , on a :

$$|f(x, u_n)u| \leq Q_2 |u_n|^{q-1} |u| \leq Q_2 |h|^{q-1} |u| \in L^1(\Omega).$$

car :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |h|^{q-1} |u| &\leq C \left( \int_{\Omega} h^{(q-1)q'} \right)^{1/q'} \|u\|_{L^q} \\ &= C \|h\|_{L^q}^{q-1} \|u\|_{L^q} \\ &\leq C' \|h\|_{L^q}^{q-1} \|u\|_{W_0^{1,p}} < \infty. \end{aligned}$$

Alors, d'après T.C.D on déduit que :

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) u dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx$$

$\blacklozenge$  on suit les mêmes étapes pour conclure que :

$$\int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \longrightarrow \int_{\Omega} f(x, u) u dx$$

On considère la suite :

$$\begin{aligned}
 P_n &= I'(u_n)u_n + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n - I'(u_n)u - \int_{\Omega} f(x, u_n)u \\
 &= [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}(\nabla u_n)^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n \\
 &\quad - [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u + \int_{\Omega} f(x, u_n)u - \int_{\Omega} f(x, u_n)u \\
 &= [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p - [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

On a lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $P_n \rightarrow 0$

et par conséquent :

$$P_n = [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \|u_n\|^p - [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \tag{3.28}$$

D'autre part, on considère la suite  $T_n$  :

$$T_n = -[M(\|u\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n + [M(\|u\|)^p]^{p-1} \|u\|^p. \tag{3.29}$$

On a :  $T_n \rightarrow 0$ , car :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \|\nabla u\|_{L^p}^p = \|u\|_{W_0^{1,p}}^p,$$

on a : comme  $\|u_n\|^p \rightarrow t_0$  et  $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  et continue, il signifie que :

$$M(\|u_n\|^p) \rightarrow M(t_0).$$

En additionnant (3.28) et (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P_n + T_n &= [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \|u_n\|^p - [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\
 &\quad - [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n + [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \|u\|^p \\
 &= [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \left[ \|u_n\|^p - \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n + \|u\|^p \right]
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

en utilisant les inégalités standard dans  $\mathbb{R}$ , donné par :

- Si  $p \geq 2$ , on a :

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq C_p |x - y|^p$$

- Si  $1 < p < 2$ , on a :

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \frac{C_p |x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}$$

Alors d'après (3.26), (3.30) devient :

$$\begin{aligned} P_n + T_n &= [M(\|u_n\|)^p]^{p-1} \int_{\Omega} \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \\ &\geq \overline{C}^{p-1} C_p \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^p \\ &= \overline{C}^{p-1} C_p \|u_n - u\|_{W_0^{1,p}}^p \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}}^p \leq \frac{P_n + T_n}{\overline{C}^{p-1} C_p} \longrightarrow 0$$

Alors,

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}}^p \longrightarrow 0$$

Donc, on conclut que :  $u_n$  est convergente dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , c-à-d ;

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

Enfin, on déduit que la fonctionnelle  $I$  satisfait la condition de Palais Smale.

**Preuve du théorème 3.3.1** On considère  $\{e_1, e_2, \dots\}$  une base de Schaudère de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et pour chaque  $k \in \mathbb{N}$

On considère  $X_k = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  le sous espace de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  engendré par les  $k$  vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

On note que  $X_k \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , avec  $1 \leq q \leq 2^*$ . Par conséquent, les normes de  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$  sont équivalents sur  $X_k$ , alors il existe un constant positif  $C(k)$  qui dépend du  $k$ , tel que :

$$-C(k) \|u\|^q \geq - \int_{\Omega} |u|^q, \quad (3.31)$$

pour tout  $u \in X_k$ . En utilisant  $(H_1)$  et  $(H_2)$  pour conclure que :

$$I(u) \leq \frac{B}{p(\alpha + 1)} \|u\|^{p(\alpha+1)} - c(k) \|u\|^q.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 I(u) &= \frac{1}{p} \widehat{M}(\|u\|^p) - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
 &= \frac{1}{p} \int_0^{\|u\|^p} (M(s))^{p-1} ds - \int_{\Omega} \int_0^u f(x, s) ds dx \\
 &\leq \frac{B}{p} \int_0^{\|u\|^p} s^{\alpha} ds - Q_1 \int_{\Omega} \int_0^u s^{q-1} ds dx \\
 &\leq \frac{B}{p(\alpha+1)} \|u\|^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_1}{q} \int |u|^q dx \\
 &\leq \frac{B}{p(\alpha+1)} \|u\|^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_1}{q} c(k) \|u\|^q.
 \end{aligned}$$

Ou aussi :

$$I(u) \leq \|u\|^q \left( \frac{B}{p(\alpha+1)} \|u\|^{p(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} c(k) \right)$$

Soit  $R > 0$  tel que :

$$\begin{aligned}
 R^q \left( \frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} c(k) \right) &< 0 \\
 \frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} c(k) &< 0 \\
 \frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} &< \frac{Q_1}{q} c(k).
 \end{aligned}$$

Pour tout  $0 < r < R$ , on considère :

$$K = \{u \in X_k : \|u\| = r\}.$$

On prend :

$$\begin{aligned}
 I(u) &< r^q \left( \frac{B}{p(\alpha+1)} r^{p(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} c(k) \right) \\
 &< R^q \left( \frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} - \frac{Q_1}{q} c(k) \right) \\
 &< 0 = I(0).
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\sup_K I(u) < 0.$$

On a  $K \subset X_k$ ,  $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$ . En considérant l'homéomorphisme :

$$\begin{aligned}
 g : K &\longrightarrow S^{k-1} \\
 u &\longrightarrow g(u) = \frac{1}{r}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)
 \end{aligned}$$

### *CHAPITRE 3. EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'ÉQUATION DE TYPE KIRCH*

On déduit que

$$\gamma(K) = \gamma(S^{k-1}) = k.$$

D'après le théorème de Clark (2.3.1), la fonctionnelle  $I$  admet au moins  $k$  paires de points critiques et comme  $k$  arbitraire alors  $I$  admet une infinité de points critiques et par conséquent le problème (P) admet une infinité de solutions faibles.



# Conclusion générale

Dans ce travail, on a étudié une méthode très importante pour démontrer l'existence et la multiplicité d'une solution faible de problème de type **p-Kirchhoff** qui est appelé " La méthode variationnelle via la théorie du genre"; plus précisément, on a appliqué quelques résultats principales du théorème de Clark dans l'étude de ce problème pour  $1 < p < N$ .

On laisse ce travail au débat ouvert pour l'étude de problème de type **Kirchhoff** pour  $p = p(x)$ , tel que on remplace  $\Delta_p u$  par  $\Delta_{p(x)} u$  où :

$$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u).$$

# Bibliographie

- [1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners, existence results via variational approach*, springer-verlag London Limited, 2011.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, masson, Paris, 1992.
- [4] A. Castro, Metodos variacionais y analysis funcional no linear, in : X Colóquio Colombiano de Matemáticas, 1980.
- [5] K.C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Peking Univercity, September, 2003.
- [6] D.C. Clarke, A variant of the Lusternik Schnirelman theory, Indiana Univ. Math. J. 22 (1972) 65-74
- [7] P. Enfla, A conter example to the approximation property in Banach spaces, Acta.maths.130(1973), p.309-317.
- [8] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On a  $p$ -Kirchhoff via Krasnoselskii's genus*, Applied Mathematics Letters vol.22, 819-822, 2009.
- [9] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of  $p$ -Kirchhoff via variational methods*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.74, 263-277, 17 April 2009.
- [10] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques, et application aux problèmes elliptiques*, O.K. Nancy, le 20 Juillet 1993.
- [11] M.A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, 1964.

- [12] H. Le Dret, Note de cours, M2-Équations aux dérivées partielles elliptiques, Université PIERRE et MARIE CURIE, 4 mars 2010.
- [13] L. Ljusternik and L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Hermann and Cie.
- [14] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, On the complemented subspaces problems, Israel J. Math., 9(1971), p.263-269.
- [15] P.H. Rabinowitz, Minmax methods in critical point theory with applications to differential equation, Conference Board of the mathematical science, by the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1984.
- [16] I. Singer, Bases in Banach spaces, Springer (1970).
- [17] M. Struwe, Variational Methods (Applications to Nonlinear Partial Differential Equation and Hamiltonian Systems, Springer. Verlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [18] Convergence faible, Résumé du cours de MEDP, Maîtrise de mathématiques 2001 - 2002, 2001nov18 (medp-conv-faible.tex), <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/E/MEDP-0102/medp-conv-faible.pdf>